

解析几何考点和答题技巧归纳

一、解析几何的难点

从解题的两个基本环节看：

- 1、翻译转化：将几何关系恰当转化（准确，简单），变成尽量简单的代数式子（等式 / 不等式），或反之...
- 2、消元求值：对所列出的方程 / 不等式进行变形，化简，消元，计算，最后求出所需的变量的值/范围 等等

难点：上述两个环节中

- 变量、函数/方程/不等式的思想
- 灵活性和技巧性
- 分类讨论
- 综合应用其他的代数几何知识
- 不小的计算量

二、复习建议

分两个阶段，两个层次复习：

- 1、基础知识复习：落实基本问题的解决，为后面的综合应用做好准备。

这个阶段主要突出各种曲线本身的特性，以及解决解析问题的一般性工作的落实，如：

① 直线和圆：突出平面几何知识的应用（ d 和 r 的关系！）；抛物线：突出定义在距离转化上的作用，以及设点消元上与椭圆双曲线的不同之处。

② 圆锥曲线的定义、方程、基本量（ a 、 b 、 c 、 p ）的几何意义和计算

③ 直线和圆锥曲线的位置关系的判断（公共点的个数）

④ 弦长、弦中点问题的基本解法

⑤ 一般程序性工作的落实：设点、设直线（讨论？形式？）联立消元、列韦达结论... 中的计算、讨论、验 Δ

...

- 2、综合复习：重点攻坚翻译转化和消元求值的能力

① 引导学生在“解题路径规划”的过程中理解解析法：变量、等式（方程/函数）、不等式的思想

② 积累常见的翻译转化，建立常见问题的解决模式

③ 一定量的训练，提高运算的准确性、速度，提高书写表达的规范性、严谨性

● 具体说明

1、引导学生在“解题路径规划”的过程中理解解析法：变量、等式(方程/函数)、不等式的思想

建议在例题讲解时，总是在**具体计算之前**进行“解题路径规划”：

① 条件和结论与哪几个变量相关？解决问题需要设哪些变量？

② 能根据什么条件列出几个等式和不等式？它们之间独立吗？够用了吗？

③ 这些等式/不等式分别含有什么变量？如何消元求解最方便？

④ 根据这些等式和不等式，能变形、消元后得到什么形式的结论（能消掉哪些变量？得到两个变量的新等式/不等式？变量的范围？求出变量的值？）

好处：①选择合适的方法；②避免中途迷失

[注] 关于消元

常用的消元法：

- 代入消元
- 加减/乘除消元
- 韦达定理整体代入 → 消掉交点坐标 ← 换元,消元的能力非常重要
- 点差法 → 弦中点与弦斜率的等量关系
-

2、积累常见翻译转化，建立常见问题的解决模式

(1) 常见的翻译转化：

① 点在曲线上 → 点的坐标满足曲线方程

- ② 直线与二次曲线的交点 $\rightarrow \begin{cases} \text{点坐标满足直线方程} \\ \text{点坐标满足曲线方程} \\ x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots \\ y_1 + y_2 = \dots, y_1 y_2 = \dots \end{cases}$
- ③ 两直线 AB 和 CD 垂直 $\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ k_{AB} \cdot k_{CD} = -1 \end{cases}$
- ④ 点 A 与 B 关于直线 l 对称 $\rightarrow \begin{cases} \text{中: } AB \text{ 的中点} \in l \\ \text{垂: } AB \perp l \end{cases}$
- ⑤ 直线与曲线相切 $\rightarrow \begin{cases} \text{圆: } d = r \\ \text{一般二次曲线: 二次项系数} \neq 0 \text{ 且 } \Delta = 0 \end{cases}$
- ⑥ 点 (x_0, y_0) 在曲线的一侧/内部/外部 $\rightarrow$ 代入后 $f(x_0, y_0) > 0$ 或 $f(x_0, y_0) < 0$
- ⑦ $\angle ABC$ 为锐角 或 零角 $\rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$
- ⑧ 以 AB 为直径的圆过点 C $\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ |CA|^2 + |CB|^2 = |AB|^2 \end{cases}$
- ⑨ AD 平分 $\angle BAC \rightarrow \begin{cases} AD \perp x \text{ 轴或 } y \text{ 轴时: } k_{BA} = -k_{AC} \\ AD \text{ 上点到 } AB、AC \text{ 的距离相等} \\ \overrightarrow{AD} \parallel (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \end{cases}$
- ⑩ 等式恒成立 $\rightarrow$ 系数为零或对应项系数成比例
- ⑪ A、B、C 共线 $\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC} \\ k_{AB} = k_{BC} \\ C \text{ 满足直线 } AB \text{ 的方程} \end{cases}$

.....

[注] 关于直线与圆锥曲线相交的列式与消元：

① 如果几何关系与两个交点均有关系，尤其是该关系中，两个交点具有轮换对称性，那么可优先尝试利用**韦达定理**得到交点坐标的方程，然后整体消元

如果几何关系仅与一个交点相关，那么优先尝试“**设点代入**”（交点坐标代入直线方程和曲线方程）；

② 如果几何关系翻译为交点的坐标表示后，与 $x_1 + x_2, y_1 + y_2$ 相关（如：弦的中点的问题），还可尝试用“**点差法**”（“**代点相减**”法）来整体消元，但仍需保证 $\Delta > 0$

（2）建立常见题型的“模式化”解决方法（不能太过模式化，也不能没有模式化）

如：

- ① 求曲线方程： $\begin{cases} \text{待定系数法} \\ \text{直译法} \\ \text{定义法} \\ \text{相关点法} \\ \text{参数法} \\ \dots \end{cases}$

难度较大，上海常考的是待定系数法、定义法和相关点法。

- ② 求范围/最值： $\begin{cases} \text{等式型(函数型): 由几个变量的等式来求其中某个变量的范围} \\ \text{不等式型: 均值. 注意等号成立的条件} \\ \text{几何意义: 两点间线段最短, 垂线段最短, 切线相关 等} \end{cases}$

③ 定值/定点：

常见模式：很多定值定点问题（也是定值问题——坐标是定值）就是求某个变量的值，通常由条件列出的独立方程个数少于变量的个数，但由于其形式的特殊性，通过消元后恰好能求出某个（或几个）变量的值（而其他变量的值却仍无法确定）

如：

$$\text{消去: } t = 5\lambda^2 + 3 - 5\lambda^2 \Rightarrow t = 3$$

$$\text{约去: } t = \frac{5\lambda^2 + 3}{10\lambda^2 + 6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{范围约束: } (x-4)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(x-4)(y^2+1) = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{恒成立之系数为 0: } t - 4 = 5\lambda x^2 + 3\lambda x \text{ 对 } \forall \lambda \in \mathbf{R} \text{ 恒成立} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ 或 } -\frac{3}{5} \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{恒成立之系数成比例: } t = \frac{10\lambda^2 x^2 + (\lambda + 4)x + 1}{5\lambda^2 x^2 + 3\lambda + m} \text{ 对 } \forall \lambda \in \mathbf{R} \text{ 恒成立} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ t = 2 \\ m = \frac{25}{2} \end{cases}$$

等等。

关于结论：关于定值定点，有很多总结好了的结论，重在这些结论推导的过程，而不必刻意让学生去记忆这些结论。

3、一定量的训练，提高运算的准确性、速度，提高书写的规范性、严谨性

(1) 示范和训练相结合，舍得花时间！

不同的设元，消元方案，不同的转化、“翻译”方法，带来的计算量也可能大不一样，需要通过一定量的实践来提高敏感度，提高灵活性，使自己能尽快地发现原有方案的不合适之处，并迅速调整，尝试。

书写的习惯影响计算的速度和准确性。可以考虑在开始时不过于要求速度。而专重视“一次计算”的准确性（“落笔对”）。逐渐养成“一个字写完了再写下一个字”、“减少跳步”、“折叠使用草稿纸”等好的习惯。

规范的表达源自老师的板书展示和对平时作业的严格要求，也是一种习惯。老师要舍得用课堂时间带着学生一步步计算，要舍得让学生在课堂上独立完整地计算整道题。

(2) 常用的“小方法”

- ① 涉及直线、圆的问题充分利用平面几何知识
- ② 点差法
- ③ 经过某处点的直线与二次曲线必定相交
- ④ 直线方程的设法
- ⑤ 由对称性，形式上的一致性“同理”可得
- ⑥ 定值定点问题可由特殊值法先得到结论
- ⑦ 直线与二次曲线相交且已知一个交点时，利用韦达定理求另一个交点
- ⑧ 三角形（或多边形）的面积用平/直的直线割补后再求

(3) 常易忽略的细节

- ① 设直线时注意：直线与坐标轴垂直的情况单独考虑；
- ② 使用韦达定理之前，要确保 $\Delta \geq 0$ + 要讨论二次项系数是否为 0；
- ③ 消元、换元时注意新旧变量的范围 ← 不仅仅是在解析中的问题了...

$$\text{④ } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0 \Leftrightarrow \angle AOB \text{ 为锐角或零角}$$

$$\text{同样 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0 \Leftrightarrow \angle AOB \text{ 为钝角或零角}$$